

راز کارت‌های سن و سال*

اشاره

در این مقاله تلاش شده از یک بازی (شعبده) ریاضی رمزگشایی شود. ابتدا با خود بازی آشنا می‌شویم و سپس سعی می‌کنیم مرحله به مرحله به اسرار آن پی ببریم. در نهایت، گشایش رموز این بازی، ما را به تعمیم این بازی و اثبات ریاضی درستی این تعمیم رهنمون می‌شود.

مقدمه

داستان از اینجا آغاز شد که روزی دانش‌آموزی هفت کارت را به من نشان داد که روی هر کدام از آن‌ها تعداد زیادی عدد طبیعی نوشته شده بود. او از من خواست اگر عدد سنم را روی هر کدام از این کارت‌ها دیدم، آن کارت را جدا کنم و به او بدهم. من هم همین کار را کردم و سه کارت را که عدد سنم روی آن‌ها بود، به وی دادم. دانش‌آموز به سرعت نگاهی به کارت‌ها کرد و سنم را به من گفت! با تعجب کارت‌ها را از او گرفتم و به آن‌ها نگاه کردم. اعداد روی کارت‌ها به صورت زیر بود:

۴	۵	۶	۷	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۶	۳۷
۳۸	۳۹	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۵۲	۵۳	۵۴
۵۵	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳		

۴

۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵
۳۷	۳۹	۴۱	۴۳	۴۵	۴۷	۴۹	۵۱	۵۳
۵۵	۵۷	۵۹	۶۱	۶۳	۶۵	۶۷	۶۹	۷۱
۷۳	۷۵	۷۷	۷۹	۸۱	۸۳	۸۵	۸۷	۸۹
۹۱	۹۳	۹۵	۹۷	۹۹	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۵	۱۰۷

۰

۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۴۰	۴۱
۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷		

۳

۲	۳	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۴	۱۵	۱۸
۱۹	۲۲	۲۳	۲۶	۲۷	۳۰	۳۱	۳۴	۳۵
۳۸	۳۹	۴۲	۴۳	۴۶	۴۷	۵۰	۵۱	۵۴
۵۵	۵۸	۵۹	۶۲	۶۳	۶۶	۶۷	۷۰	۷۱
۷۴	۷۵	۷۸	۷۹	۸۲	۸۳	۸۶	۸۷	۹۰
۹۱	۹۴	۹۵	۹۸	۹۹	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۶	۱۰۷

۱

تکرار شده، مجموع عضو ابتدای آن مجموعه‌هاست. برای مثال، عدد ۲۶ که تنها در مجموعه‌های ۴، ۳ و ۱ تکرار شده، مجموع ۱۶، ۸ و ۲ است که این‌ها به ترتیب عضو ابتدای مجموعه‌های مذکورند. (می‌توان با عددهای دیگر نیز درستی این مطلب را بررسی کرد.)

۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۴۸	۴۹
۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳
۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵						

۴

راز سوم

مطلب دیگری که کم‌کم خود را آشکار می‌کند این است که عضو آغازین هر مجموعه، توانی حسابی^۱ از ۲ است. برای مثال، عضو ابتدای مجموعه ۰ عدد ۴ و مجموعه ۰ عدد ۱ است. آشکار شدن رازهای دوم و سوم این موضوع را مطرح می‌کند که هر عدد طبیعی از ۷ تا ۱۰۷ را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌های منحصره‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت. به این معنا که در نوشتن هر عدد به صورت مجموعی از توان‌های ۲، هر توانی از ۲ حداکثر یک‌بار ظاهر می‌شود. آیا این مطلب برای هر عدد طبیعی نیز برقرار است؟

۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹
۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸
۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷
۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶
۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵
۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴
۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳
۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷					

۵

به این معنا که آیا هر عدد طبیعی را می‌شود به صورت مجموعی از توان‌های منحصره‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت؟ باید درستی این حدس را ثابت کنیم.

۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱
۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹
۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	

۶

راز چهارم

چه رابطه‌ای بین اعضای هر کدام از این مجموعه‌ها برقرار است؟ مجموعه ۰ متشکل از تمام اعداد فرد بین ۱ و ۱۰۷ است. اما مجموعه ۱ از ۲ شروع می‌شود و دو عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصله ۴ از عدد ۶ شروع می‌شود و دوباره دو عدد متوالی می‌آید و به همین ترتیب ادامه می‌دهد تا مجموعه را پر کند. مجموعه ۲ از ۴ شروع می‌شود و چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصله ۸ از عدد ۱۲ شروع شده و باز چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد و به همین منوال تا مجموعه کامل شود. می‌توان حدس زد مجموعه‌های دیگر هم به همین صورت تشکیل شده‌اند.

اندکی تأمل بیشتر در روند شکل‌گیری این مجموعه‌ها نشان می‌دهد که هر یک از این مجموعه‌ها، از دسته‌هایی تشکیل شده‌اند که عددهای هر دسته، در تقسیم بر عضو ابتدای

راز اول

در نگاه اول چیزی که به ذهن خطور می‌کند، این است که سن من تنها عدد مشترک میان آن هفت کارت جدا شده است. پس شاید دانش‌آموز با دیدن این کارت‌ها و یافتن اشتراک آن‌ها به سن من پی برده است. خوب این فرض، هم صحیح است و هم ناصحیح. اگر ما به ترتیب از پایین به بالا مجموعه‌ها (کارت‌ها) را ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶

کلی‌تر است که تعمیم این بازی برای مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از هر توان دلخواهی از ۲ محسوب می‌شود. به‌جای اثبات این قضیه، شکل تعمیم یافته آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

تعمیم قضیه

فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $S = \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\}$ ؛ برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ مجموعه A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \left\{ x \in S \left\lfloor \frac{x}{2^i} \right\rfloor \text{ عددی فرد باشد} \right\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = S \quad \text{الف.}$$

ب. برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ و اگر $y \in A_i$ ، آنگاه $2^i \leq y$.

ج. اگر $y \in S$ ، آنگاه k عدد i_1, i_2, \dots, i_k از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که:

$$y = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k} \quad \text{و} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

د. فرض کنیم $y \in S$ و k عدد i_1, i_2, \dots, i_k از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$$y = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k} \quad \text{و} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

در این صورت، اگر $z \in \{1, 2, \dots, k\}$ ، آنگاه $y \in A_{i_z}$ و همچنین اگر $z \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ و $z \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ، آنگاه $y \notin A_z$.

اثبات

الف. بدیهی است که: $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i = S$. اکنون فرض

می‌کنیم: $x \in S$ ، آنگاه بنا به خاصیت ارضمیدسی $k \in \mathbb{N}$ و $0 \leq k < x < 2^{k+1}$. پس:

$$\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor = 1 \quad \text{بنابراین} \quad x \in A_k \quad \text{که این خود نشان می‌دهد}$$

$$x \in \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \quad \text{لذا:} \quad S \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

ب. چون $\left\lfloor \frac{y}{2^i} \right\rfloor = 1$ ، پس $2^i \in A_i$ اکنون فرض

مجموعه، دارای «جزء صحیح» یکسان هستند. جالب‌تر آنکه این جزء صحیح عددی فرد است. به‌عنوان نمونه، در مجموعه ۳ که از ۸ آغاز می‌شود، دسته اول اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۱ هستند، دسته دوم نیز شامل اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۳ هستند و الی آخر.

حالا که روند تولید هر کدام از این مجموعه‌ها آشکار شد، می‌توان دید که به این روش می‌شود اعداد طبیعی بین ۱ تا ۱۲۷ را نیز در این ۷ مجموعه گنجانند. پس اینکه روی این کارت‌ها تا عدد ۱۰۷ نوشته شده، صرفاً به‌خاطر این بوده که طراح، بازی را برای افراد کمتر از ۱۰۷ سال طراحی کرده است. اکنون که پرده‌ها یک‌به‌یک کنار رفتند و شعبده آشکار شد، بهتر است که صورت دقیق‌تر و ریاضی این بازی را در قالب قضیه زیر بیان کنیم.

قضیه

فرض کنیم $S = \{1, 2, 3, \dots, 127\}$ ؛ برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ مجموعه A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \left\{ x \in S \left\lfloor \frac{x}{2^i} \right\rfloor \text{ عددی فرد باشد} \right\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

$$\bigcup_{i=0}^6 A_i = S \quad \text{الف.}$$

ب. برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ و اگر $y \in A_i$ ، آنگاه $2^i \leq y$.

ج. اگر $y \in S$ ، آنگاه k عدد i_1, i_2, \dots, i_k از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که:

$$y = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k} \quad \text{و} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

د. اگر $y \in S$ و k عدد i_1, i_2, \dots, i_k از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$$y = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k} \quad \text{و} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

در این صورت، اگر $z \in \{1, 2, \dots, k\}$ ، آنگاه $y \in A_{i_z}$ و همچنین اگر $z \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ و $z \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ، آنگاه $y \notin A_z$.

این قضیه در حقیقت حالت خاصی از یک قضیه

می‌کنیم $y \in A_1$ پس $\left[\frac{y}{2^1}\right]$ عددی فرد است. بنابراین

$m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به گونه‌ای که $2^m - 1 \leq \left[\frac{y}{2^m}\right]$ ، لذا $\frac{y}{2^m} < 2^m - 1 \leq \frac{y}{2^m}$ که این نیز نتیجه می‌دهد: $2^m \leq y$.

ج. فرض کنیم: $y \in S$ ، در این صورت $0 \leq i_1 < n$ وجود دارد، به طوری که: $2^{i_1} \leq y < 2^{i_1+1}$. اکنون قرار می‌دهیم: $y_1 = y - 2^{i_1}$ با استدلالی مشابه، $0 \leq i_2 < i_1$ وجود دارد، به طوری که: $2^{i_2} \leq y_1 < 2^{i_2+1}$. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، بعد از چند مرحله $y_k = 0$ یا: $y_k = 1$ اگر: $y_k = 0$ که اثبات تمام است. در غیر این صورت: $y_k = 1 = 2^0$ پس $i_{k+1} = 0$ بنابراین:

$$y = 2^{i_k} + \dots + 2^{i_2} + 2^{i_1} \quad \text{و} \quad i_k < i_{k-1} < \dots < i_1 < i_0$$

د. فرض کنیم: $y \in S$ و k عدد $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k$ از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$$y = 2^{i_k} + \dots + 2^{i_2} + 2^{i_1} \quad \text{و} \quad i_k < i_{k-1} < \dots < i_1 < i_0$$

همچنین، فرض کنیم: $\{1, 2, \dots, k\} \in z$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^z} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_{j-1}} + 2^z + 2^{i_{j+1}} + \dots + 2^{i_k}}{2^z} = 2^{i_1 - i_j} + \dots + 2^{i_{j-1} - i_j} + 1 + \frac{1}{2^{i_j - i_{j+1}}} + \dots + \frac{1}{2^{i_j - i_k}}$$

بنابراین: $\left[\frac{y}{2^z}\right] = 2^{i_1 - i_j} + \dots + 2^{i_{j-1} - i_j} + 1$ که عددی فرد است. پس: $y \in A_j$.

حال فرض می‌کنیم $\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k\} \notin z$ و $\{0, 1, 2, \dots, n-1\} \in z$. در این صورت سه حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: $0 < z \leq i_k$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^z} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k}}{2^z} = 2^{i_1 - z} + \dots + 2^{i_k - z}$$

که عددی صحیح و زوج است. بنابراین $\left[\frac{y}{2^z}\right] \notin A_j$ و: $y \notin A_j$.

حالت دوم: عددی مانند $m \in \{0, 1, \dots, k\}$ وجود داشته باشد که: $i_m < z < i_{m-1}$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^z} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_{m-1}} + 2^{i_m} + \dots + 2^{i_k}}{2^z} = 2^{i_1 - z} + \dots + 2^{i_{m-1} - z} + \frac{1}{2^{z - i_m}} + \dots + \frac{1}{2^{z - i_k}}$$

پس $\left[\frac{y}{2^z}\right] = 2^{i_1 - z} + \dots + 2^{i_{m-1} - z}$ عددی زوج است. بنابراین: $y \notin A_j$.

حالت سوم: $i_1 < z \leq n-1$ در این صورت:

$$\frac{y}{2^z} = \frac{2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_k}}{2^z} = \frac{1}{2^{z - i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{z - i_k}}$$

که عددی بین 0 و 1 است. بنابراین: $\left[\frac{y}{2^z}\right] = 0$.

پس: $y \notin A_j$.

مقاله را با طرح چند تمرین برای خوانندگان به پایان می‌رسانیم.

تمرین

۱. در حین اثبات این قضیه به طور ضمنی نشان دادیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌های منحصر به فرد حسابی عدد ۲ نوشت. آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌های منحصر به فرد حسابی عدد p نوشت که در آن، p عددی اول و مخالف ۲ است؟ چرا؟

۲. هر عدد طبیعی را به صورت مجموعی از توان‌های منحصر به فرد حسابی چه اعدادی می‌توان نوشت؟

۳. فرض کنیم: $n \in \mathbb{N}$ و $S = \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\}$ و برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه B_i را زیر مجموعه‌ای از S تعریف می‌کنیم که اعضایش در نمایش بر مبنای ۲ دارای رقم ۱ام یک باشند. نشان دهید: $B_i = A_{i+1}$

۴. با استفاده از تمرین ۴، این بازی را با استفاده از مبنای ۲ تفسیر کنید.

۵. در قضیه اثبات شده، تعداد عضوهای $A_j \cap A_i$ را که در آن داشته باشیم: $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ بشمارید.

۶. فرض کنیم: $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ در این صورت $\bigcap_{i=1}^k A_{i_i}$ دارای چند عضو است؟

۷. الگوریتمی بنویسید که $n \in \mathbb{N}$ را بگیرد و n مجموعه را که شرایط قضیه را دارند، چاپ کند.

* پی‌نوشت‌ها

* این مقاله حاصل تلاش بازی‌گوشانه نگارنده در کشف و گسترش قواعد یک بازی است. لذا برای نگارش آن از منبع و مرجعی خاص استفاده نشده است.

۱. اجتماع مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه تک‌عضوی صفر را «مجموعه اعداد حسابی» گوئیم.

۲. بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی هر عدد حقیقی را جزء صحیح گوئیم. جزء صحیح عدد حقیقی x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.