**روح‌الله حسنی***
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر دبیرستان‌های شیراز

# راز کارت‌های سن و سال*

**اشاره**

**در این مقاله تلاش شـده از یک بازی (شـعبده) ریاضی رمزگشایی شود. ابتدا با خود بازی آشنا می‌شویم و سپس سعی می‌کنیم مرحله‌به‌مرحله به اسرار آن پی ببریم. در نهایت، گشایش رموز این بازی، ما را به تعمیم این بازی و اثبات ریاضی درستی این تعمیم رهنمون می‌شود.**

## مقدمه

داستان از اینجا آغاز شد که روزی دانش‌آموزی هفت کارت را به من نشان داد که روی هر کدام از آن‌ها تعداد زیادی عدد طبیعی نوشته شده بود. او از من خواست اگر عدد سنّم را روی هر کدام از این کارت‌ها دیدم، آن کارت را جدا کنم و به او بدهم. من هم همین کار را کردم و سه کارت را که عدد سنم روی آن‌ها بود، به وی دادم. دانش‌آموز به سرعت نگاهی به کارت‌ها کرد و سنم را به من گفت! با تعجب کارت‌ها را از او گرفتم و به آن‌ها نگاه کردم. اعداد روی کارت‌ها به‌صورت زیر بود:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **۱** | ۳ | ۵ | ۷ | ۹ | ۱۱ | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷ |
| ۱۹ | ۲۱ | ۲۳ | ۲۵ | ۲۷ | ۲۹ | ۳۱ | ۳۳ | **۳۵** |
| ۳۷ | ۳۹ | ۴۱ | ۴۳ | ۴۵ | ۴۷ | ۴۹ | ۵۱ | ۵۳ |
| ۵۵ | ۵۷ | ۵۹ | ۶۱ | ۶۳ | ۶۵ | ۶۷ | ۶۹ | ۷۱ |
| ۷۳ | ۷۵ | ۷۷ | ۷۹ | ۸۱ | ۸۳ | ۸۵ | ۸۷ | ۸۹ |
| ۹۱ | ۹۳ | ۹۵ | ۹۷ | ۹۹ | ۱۰۱ | ۱۰۳ | ۱۰۵ | ۱۰۷ |

۰

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **۴** | ۵ | ۶ | ۷ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۲۰ |
| ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۶ | ۳۷ |
| ۳۸ | ۳۹ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ |
| ۵۵ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ |
| ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۹۲ |
| ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۱۰۰ | ۱۰۱ | ۱۰۲ | ۱۰۳ | | |

۲

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۶ | ۷ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۸ |
| ۱۹ | ۲۲ | ۲۳ | **۲۶** | ۲۷ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۴ | **۳۵** |
| ۳۸ | ۳۹ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۶ | ۴۷ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۴ |
| ۵۵ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۶ | ۶۷ | ۷۰ | ۷۱ |
| ۷۴ | ۷۵ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۶ | ۸۷ | ۹۰ |
| ۹۱ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۲ | ۱۰۳ | ۱۰۶ | ۱۰۷ |

۱

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۲۴ |
| ۲۵ | **۲۶** | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۴۰ | ۴۱ |
| ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ |
| ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ |
| ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ |
| ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۱۰۴ | ۱۰۵ | ۱۰۶ | ۱۰۷ | | |

۳

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ |
| ۲۵ | **۲۶** | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۴۸ | ۴۹ |
| ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ |
| ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ |
| ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ |
| ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | | | | | | |

$\overline{۴}$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | **۳۵** | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ |
| ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ |
| ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ |
| ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۹۶ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ |
| ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ | ۱۰۱ | ۱۰۲ | ۱۰۳ |
| ۱۰۴ | ۱۰۵ | ۱۰۶ | ۱۰۷ | | | | | |

$\overline{۵}$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ |
| ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ |
| ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ |
| ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ |
| ۱۰۰ | ۱۰۱ | ۱۰۲ | ۱۰۳ | ۱۰۴ | ۱۰۵ | ۱۰۶ | ۱۰۷ | |
| | | | | | | | | |

$\overline{۶}$

## راز اول

در نگاه اول چیزی که به ذهن خطور می‌کند، این است که سن من تنها عدد مشترک میان آن هفت کارت جدا شده است. پس شاید دانش‌آموز با دیدن این کارت‌ها و یافتن اشتراک آن‌ها به سن من پی برده است. خب این فرض، هم صحیح است و هم ناصحیح. اگر ما به ترتیب از پایین به بالا مجموعه‌ها (کارت‌ها) را $\overline{۶}$، $\overline{۵}$، $\overline{۴}$، $\overline{۳}$، $\overline{۲}$، $\overline{۱}$، $\overline{۰}$ بنامیم، با بررسی این مجموعه اعداد مشخص می‌شود که برای مثال، عدد ۳۵ تنها عضو مجموعه‌های $\overline{۵}$، $\overline{۱}$ و $\overline{۰}$ است. اما اینکه در نظر اول عضو مشترک این سه مجموعه دیده شود، دور از ذهن است. پس راز دیگری در میان است.

## راز دوم

کمی دقیق‌تر که به این کارت‌ها نگاه کنیم، درمی‌یابیم عددی که در تعداد مشخصی از آن‌ها تکرار شده، مجموع عضو ابتدای آن مجموعه‌هاست. برای مثال، عدد ۲۶ که تنها در مجموعه‌های $\overline{۴}$، $\overline{۳}$ و $\overline{۱}$ تکرار شده، مجموع ۱۶، ۸ و ۲ است که این‌ها به ترتیب عضو ابتدای مجموعه‌های مذکورند. (می‌توان با عددهای دیگر نیز درستی این مطلب را بررسی کرد.)

## راز سوم

مطلب دیگری که کم‌کم خود را آشکار می‌کند این است که عضو آغازین هر مجموعه، توانی حسابی[1] از ۲ است. برای مثال، عضو ابتدای مجموعهٔ $\overline{۰}$ عدد ۴ و مجموعه $\overline{۰}$ عدد ۱ است. آشکار شدن رازهای دوم و سوم این موضوع را مطرح می‌کند که هر عدد طبیعی از ۷ تا ۱۰۷ را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت. به این معنا که در نوشتن هر عدد به‌صورت مجموعی از توان‌های ۲، هر توانی از ۲ حداکثر یک‌بار ظاهر می‌شود. آیا این مطلب برای هر عدد طبیعی نیز برقرار است؟

به این معنا که آیا هر عدد طبیعی را می‌شود به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت؟ باید درستی این حدس را ثابت کنیم.

## راز چهارم

چه رابطه‌ای بین اعضای هر کدام از این مجموعه‌ها برقرار است؟ مجموعهٔ $\overline{۰}$ متشکل از تمام اعداد فرد بین ۱ و ۱۰۷ است. اما مجموعهٔ $\overline{۱}$ از ۲ شروع می‌شود و دو عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصلهٔ ۴ از عدد ۶ شروع می‌شود و دوباره دو عدد متوالی می‌آید و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهد تا مجموعه را پر کند. مجموعهٔ $\overline{۲}$ از ۴ شروع می‌شود و چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد. سپس به فاصلهٔ ۸ از عدد ۱۲ شروع شده و باز چهار عدد متوالی را دربرمی‌گیرد و به‌همین منوال تا مجموعه کامل شود. می‌توان حدس زد مجموعه‌های دیگر هم به‌همین صورت تشکیل شده‌اند.

اندکی تأمل بیشتر در روند شکل‌گیری این مجموعه‌ها نشان می‌دهد که هر یک از این مجموعه‌ها، از دسته‌هایی تشکیل شده‌اند که عددهای هر دسته، در تقسیم بر عضو ابتدای

مجموعه، دارای «جزء صحیح»[۲] یکسان هستند. جالب‌تر آنکه این جزء صحیح عددی فرد است. به‌عنوان نمونه، در مجموعهٔ $\overline{3}$ که از ۸ آغاز می‌شود، دستهٔ اول اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۱ هستند، دستهٔ دوم نیز شامل اعداد طبیعی‌اند که در تقسیم بر ۸ دارای جزء صحیح ۳ هستند و الی آخر.

حالا که روند تولید هر کدام از این مجموعه‌ها آشکار شد، می‌توان دید که به این روش می‌شود اعداد طبیعی بین ۱ تا ۱۲۷ را نیز در این ۷ مجموعه گنجاند. پس اینکه روی این کارت‌ها تا عدد ۱۰۷ نوشته شده، صرفاً به‌خاطر این بوده که طراح، بازی را برای افراد کمتر از ۱۰۷ سال طراحی کرده است.

اکنون که پرده‌ها یک‌به‌یک کنار رفتند و شعبده آشکار شد، بهتر است که صورت دقیق‌تر و ریاضی این بازی را در قالب قضیهٔ زیر بیان کنیم.

## قضیه

فرض کنیم $S=\{1,2,3,\dots,127\}$؛ برای هر $i\in\{0,1,2,\dots,6\}$، مجموعهٔ $A_i$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i=\{x\in S \mid \left[\frac{x}{2^i}\right] \text{ عددی فرد باشد}\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

**الف.** $\bigcup_{i=0}^{6} A_i=S$

**ب.** برای هر $i\in\{0,1,2,\dots,6\}$ ، $2^i\in A_i$ و اگر $y\in A_i$، آنگاه $2^i\le y$.

**ج.** اگر $y\in S$، آنگاه $k$ عدد $i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,6\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که: $i_k<i_{k-1}<\dots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\dots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

**د.** اگر $y\in S$ و $k$ عدد $i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,6\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که: $i_k<i_{k-1}<\dots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\dots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

در این صورت، اگر $j\in\{1,2,\dots,k\}$، آنگاه $y\in A_{i_j}$ و همچنین اگر $j\in\{0,1,2,\dots,6\}$ و $j\notin\{i_k,i_{k-1},\dots,i_2,i_1\}$، آنگاه $y\notin A_j$ .

این قضیه در حقیقت حالت خاصی از یک قضیه کلی‌تر است که تعمیم این بازی برای مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از هر توان دلخواهی از ۲ محسوب می‌شود. به‌جای اثبات این قضیه، شکل تعمیم یافتهٔ آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

## تعمیم‌قضیه

فرض کنیم $n\in N$ و $S=\{1,2,3,\dots,2^n-1\}$؛ برای هر $i\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$، مجموعهٔ $A_i$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i=\{x\in S \mid \left[\frac{x}{2^i}\right] \text{ عددی فرد باشد}\}$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

**الف.** $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i=S$

**ب.** برای هر $i\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$، $2^i\in A_i$ و اگر $y\in A_i$، آنگاه $2^i\le y$.

**ج.** اگر $y\in S$، آنگاه $k$ عدد $i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که: $i_k<i_{k-1}<\dots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\dots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

**د.** فرض کنیم $y\in S$ و $k$ عدد $i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$i_k<i_{k-1}<\dots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\dots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

در این صورت، اگر $j\in\{1,2,\dots,k\}$، آنگاه $y\in A_{i_j}$ و همچنین اگر $j\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ و $j\notin\{i_k,i_{k-1},\dots,i_2,i_1\}$، آنگاه $y\notin A_j$.

## اثبات

**الف.** بدیهی است که: $\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i=S$. اکنون فرض می‌کنیم: $x\in S$، آنگاه بنا به خاصیت ارشمیدسی $k\in N$ و $0\le k$ به‌گونه‌ای موجود است که: $2^k\le x<2^{k+1}$. پس: $\left[\frac{x}{2^k}\right]=1$. بنابراین $x\in A_k$ که این خود نشان می‌دهد که: $x\in\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$. لذا: $S\subset\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$.

**ب.** چون $\left[\frac{2^i}{2^i}\right]=1$، پس $2^i\in A_i$. اکنون فرض

می‌کنیم $y\in A_i$، پس $\left[\frac{y}{2^i}\right]$ عددی فرد است. بنابراین $m\in N$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\left[\frac{y}{2^i}\right]=2m-1$، لذا $\frac{y}{2^i}>2m-1\geq 1$ که این نیز نتیجه می‌دهد: $2^i\leq y$.

**ج.** فرض کنیم: $y\in S$، در این صورت $0\leq i_1<n$ وجود دارد، به‌طوری که: $2^{i_1}\leq y<2^{i_1+1}$. اکنون قرار می‌دهیم: $y_1=y-2^{i_1}$. با استدلالی مشابه، $0\leq i_2<i_1$ وجود دارد، به‌طوری که: $2^{i_2}\leq y_1<2^{i_2+1}$. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، بعد از چند مرحله $y_k=0$ یا: $y_k=1$. اگر: $y_k=0$ که اثبات تمام است. در غیر این صورت: $y_k=1=2^0$، پس $i_{k+1}=0$. بنابراین:

$i_k<i_{k-1}<\dots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\dots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

**د.** فرض کنیم: $y\in S$ و $k$ عدد $i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k$ از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که:

$i_k<i_{k-1}<\dots<i_2<i_1$ و $y=2^{i_k}+\dots+2^{i_2}+2^{i_1}$.

همچنین، فرض کنیم: $j\in\{1,2,\dots,k\}$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^{i_j}}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\dots+2^{i_{j-1}}+2^{i_j}+2^{i_{j+1}}+\dots+2^{i_k}}{2^{i_j}}$$

$$=2^{i_1-i_j}+\dots+2^{i_{j-1}-i_j}+1+\frac{1}{2^{i_j-i_{j+1}}}+\dots+\frac{1}{2^{i_j-i_k}}$$

بنابراین: $\left[\frac{y}{2^{i_j}}\right]=2^{i_1-i_j}+\dots+2^{i_{j-1}-i_j}+1$ که عددی فرد است. پس: $y\in A_{i_j}$.

حال فرض می‌کنیم $j\notin\{i_k,i_{k-1},\dots,i_2,i_1\}$ و $j\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$. در این صورت سه حالت اتفاق می‌افتد:

**حالت اول:** $0<j\leq i_k$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^j}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\dots+2^{i_k}}{2^j}=2^{i_1-j}+\dots+2^{i_k-j}$$

که عددی صحیح و زوج است. بنابراین $\left[\frac{y}{2^j}\right]$ عددی زوج است و: $y\notin A_j$.

**حالت دوم:** عددی مانند $m\in\{0,1,\dots,k\}$ وجود داشته باشد که: $i_m<j<i_{m-1}$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^j}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\dots+2^{i_{m-1}}+2^{i_m}+\dots+2^{i_k}}{2^j}$$

$$=2^{i_1-j}+\dots+2^{i_{m-1}-j}+\frac{1}{2^{j-i_m}}+\dots+\frac{1}{2^{j-i_k}}$$

پس $\left[\frac{y}{2^{i_j}}\right]=2^{i_1-j}+\dots+2^{i_{m-1}-j}$ عددی زوج است. بنابراین: $y\notin A_j$.

**حالت سوم:** $i_1<j\leq n-1$. در این صورت:

$$\frac{y}{2^j}=\frac{2^{i_1}+2^{i_2}+\dots+2^{i_k}}{2^j}=\frac{1}{2^{j-i_1}}+\dots+\frac{1}{2^{j-i_k}}$$

که عددی بین ۰ و ۱ است. بنابراین: $\left[\frac{y}{2^j}\right]=0$،

پس: $y\notin A_j$.■

مقاله را با طرح چند تمرین برای خوانندگان به پایان می‌رسانیم.

## تمرین

**۱.** در حین اثبات این قضیه به‌طور ضمنی نشان دادیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد ۲ نوشت. آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی عدد $p$ نوشت که در آن، $p$ عددی اول و مخالف ۲ است؟ چرا؟

**۲.** هر عدد طبیعی را به‌صورت مجموعی از توان‌های منحصربه‌فرد حسابی چه اعدادی می‌توان نوشت؟

**۳.** فرض کنیم: $n\in N$ و $S=\{1,2,3,\dots,2^n-1\}$ و برای هر $i\in\{1,2,\dots,n\}$، مجموعهٔ $B_i$ را زیرمجموعه‌ای از $S$ تعریف می‌کنیم که اعضایش در نمایش بر مبنای ۲ دارای رقم iام یک باشند. نشان دهید: $B_i=A_{i+1}$

**۴.** با استفاده از تمرین ۴، این بازی را با استفاده از مبنای ۲ تفسیر کنید.

**۵.** در قضیهٔ اثبات شده، تعداد عضوهای $A_i\cap A_j$ را که در آن داشته باشیم: $i,j\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ بشمارید.

**۶.** فرض کنیم: $i_k,i_{k-1},\dots,i_2,i_1\in\{0,1,\dots,n-1\}$. در این صورت $\bigcap_{i=1}^{k}A_{i_j}$ دارای چند عضو است؟

**۷.** الگوریتمی بنویسید که $n\in N$ را بگیرد و $n$ مجموعه را که شرایط قضیه را دارند، چاپ کند.

### پی‌نوشت‌ها

* این مقاله حاصل تلاش بازی‌گوشانهٔ نگارنده در کشف و گسترش قواعد یک بازی است. لذا برای نگارش آن از منبع و مرجعی خاص استفاده نشده است.

۱. اجتماع مجموعه اعداد طبیعی و مجموعهٔ تک‌عضوی صفر را «مجموعه اعداد حسابی» گوییم.

۲. بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی هر عدد حقیقی را جزء صحیح گوییم. جزء صحیح عدد حقیقی x را با نماد[x] نمایش می‌دهیم.

*Rhasanik@yahoo.com